Mécanique des structures

Chapitre 1 – 8 : Midterm

Dr. Alain Prenleloup

SGM BA3 2023-2024

EPFL

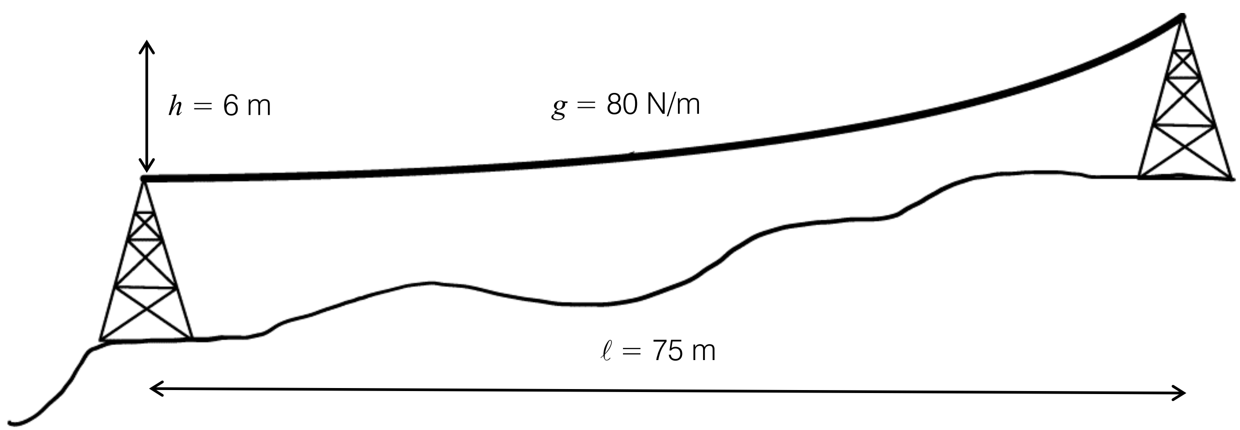
Exercice 1 (0.5 pt)

Le câble suivant est placé entre les pylônes *A* et *B*, de telle manière qu'il est horizontal en *A* (note : le câble a une longueur de ~75 m).

On considère qu'un câble ne transmet pas d'effort tranchant, ni de moment de force et qu'il forme par conséquent une parabole (équation généralisée d'une parabole : $y = ax^2 + bx + c$

a. Calculer les réactions d'appui de la structure ainsi que l'effort dans le câble en *A* et en *B*.

b. En tenant compte de l'effort maximal dans le câble (Ø = 7mm), calculer l'allongement de celui-ci (le module de Young du câble est de E = 190 GPa).

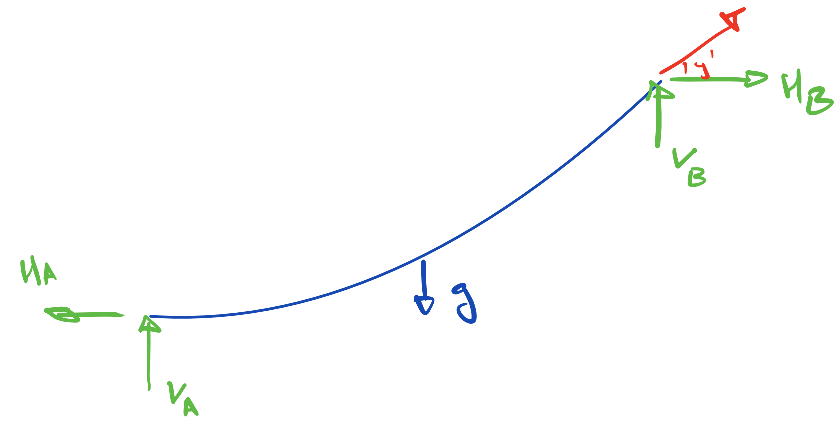


Exercice 1 (0.5 pt)

EQUATION D'EQUILIBRE (REACTION AUX APPUIS)

$\Sigma F_V \qquad \cancel{V_A}^{\,0} + V_B = g\ell = 6 \text{ kN}$

$\Sigma F_H \qquad H_A = H_B$



PARABOLE

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y(x=0) = 0 = c$$

$$y(x=\ell) = h = a\ell^2 + b\ell \qquad a = \frac{h}{\ell^2}$$

$$y'(x) = 2ax + b$$

$$y'(x=0) = 0 = b$$

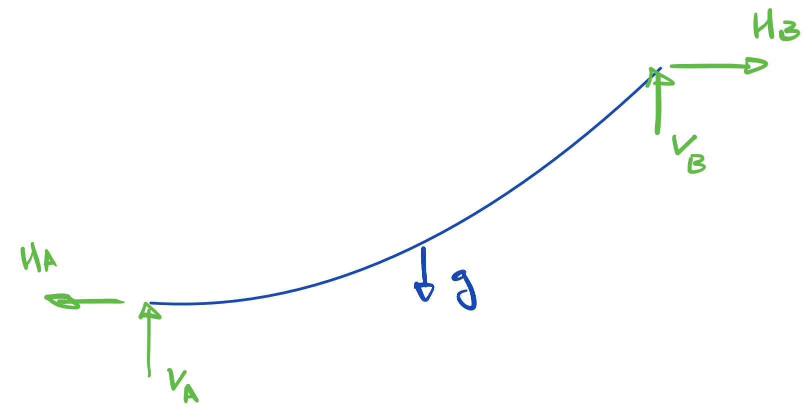
$$y'(x=\ell) = \frac{2h}{\ell^2}\,\ell = \frac{2h}{L} = \frac{V_B}{H_B} \longrightarrow \underline{\underline{H_B = \frac{g\ell^2}{2h}}} = 37.5 \text{ kN}$$

Exercice 1 (0.5 pt)

EFFORTS NORMAUX

$$N_A = H_A = 37{,}5$$

$$N_B = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = 37{,}98 \text{ kN}$$



CONTRAINTES NORMALES

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi R^2} = \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

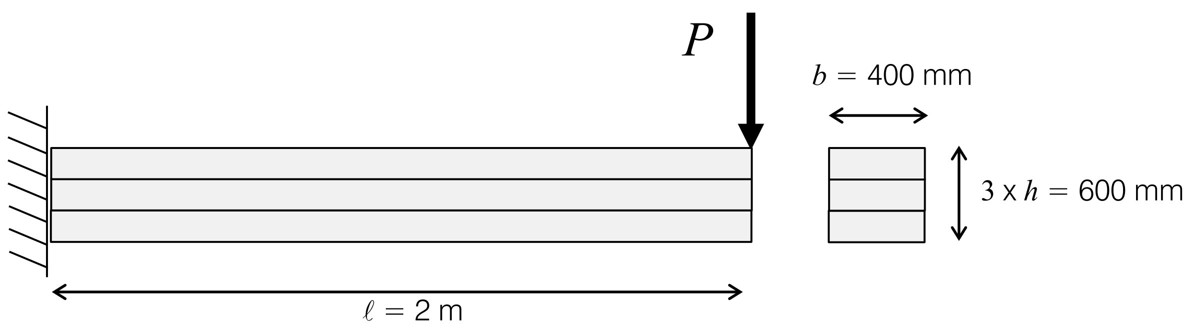
ALLONGEMENT

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{FE} = \frac{N_B}{\pi R^2 E}$$

$$\Delta \ell = \varepsilon \ell = \frac{N_B \, \ell}{\pi R^2 E} = \underline{\underline{0.39 \text{ m}}}$$

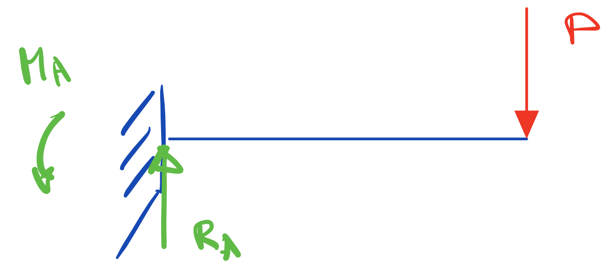
Exercice 2 (0.5 pt)

Une poutre en bois lamellé-collé est constituée de 3 bandes de section de 200mm x 400mm chacune. La contrainte admissible de cisaillement des faces collées est de 2 N/mm². Déterminer la force maximale *P* qu'on peut appliquer à l'extrémité libre d'une console de 2 m de long sans provoquer de glissement entre les bandes. Quelle est la contrainte normale maximale dans ce cas. Commenter le résultat.



Exercice 2 (0.5 pt)

ON DOIT TROUVER P POUR QUE $\tau\left(y=\frac{h}{2}\right) \le \tau_g = 2\ N/mm^2$

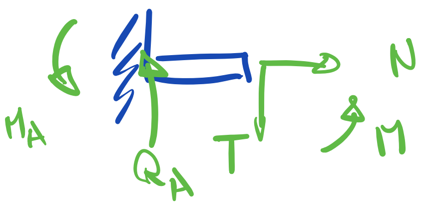


1) EFFORT EXT : P, R_A, M_A

ΣF : $R_A = P = 360\ kN$

$M_A = P\ell = 720\ kNm$

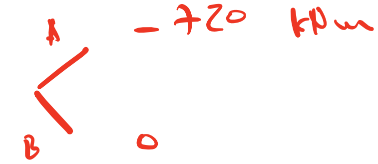
2) DISTRIBUTION



$N = 0$

$T(x) = R_A = 360\ kN$

$M(x) = R_A x - M_A =$



$M_{max}(x=0) = M_A = P\ell$

Exercice 2 (0.5 pt)

4) CISAILLEMENT

$$\tau = \frac{TS'}{Ib} \qquad \text{AVEC} \qquad I = \frac{b(3h)^3}{12} = \frac{9bh^3}{4}$$

$$S' = \frac{b(3h)^2}{8}\left[1 - \left(\frac{y}{3h/2}\right)^2\right]$$

$$\tau\left(y = \frac{h}{2}\right) = \frac{4P}{\cancel{9}\,\cancel{b}\,h^{\cancel{3}}} \; \frac{\cancel{9}\,\cancel{b}\,\cancel{h^2}}{\cancel{8}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{9}\right)}_{\cancel{8}/9} = \frac{4P}{9bh} = 2\ \frac{N}{mm^2}$$

5) FORCE SUPPORTÉE

$$P_{max} = \frac{9bh\,\tau_{MAX}}{4} = 360\ kN$$

Exercice 2 (0.5 pt)

6) CONTRAINTE NORMALE

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX} \cdot y}{I} = \frac{P \cdot \ell \cdot 3h/2}{\frac{b(3h)^3}{12}} = \frac{\cancel{12}^{\,6} \cdot \cancel{3}\, P\ell\, \cancel{h}}{\cancel{2} \cdot \cancel{27}_{\,9} \cdot b h^{\cancel{3}\,2}} = \frac{2P\ell}{3bh^2} = \underline{\underline{30 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_1(A) = \sigma_{max} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B\left(x=0, y=\frac{h}{2}\right) = \frac{P\ell \quad h/2}{\frac{b(3h)^3}{12}} = \frac{2P\ell}{9bh^2} = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_B\left(x=0, y=\frac{h}{2}\right) = 2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1(B) = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = 10.4 \text{ MPa}$$

Exercice 3 (0.25 pt)

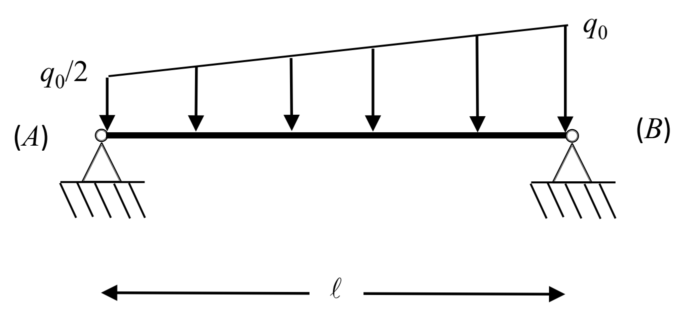
Soit la poutre de soutien d'une dalle en béton illustrée ci-dessous. La chappe a été mal coulée et crée une distribution de charge non uniforme. En ne considérant que le moment de flexion :

a. Calculer les efforts de réactions aux d'appuis A & B

b. Représenter les diagrammes des efforts intérieurs le long de la poutre

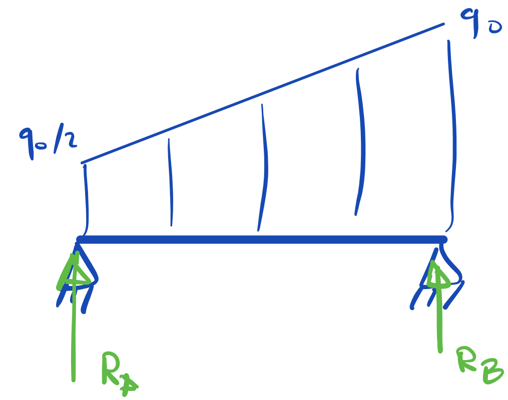
c. Écrire l'équation de la déformée

d. Calculer la position du moment de flexion max (commenter)



Exercice 3 (0.5 pt)

1) SCHEMA ET EQUATION D'EQUILIBRE



$$q(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} q_0/2 = b \\ q_0 = a\ell + b \end{cases} \implies \begin{array}{l} b = q_0/2 \\ a = \dfrac{q_0 - b}{\ell} = \dfrac{q_0}{2\ell} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad q(x) = \frac{q_0}{2\ell}\left(x + \ell\right)$$

$$\Sigma F \qquad R_A + R_B = \int_0^\ell q(x)\,dx = \frac{q_0}{2\ell}\left(\frac{\ell^2}{2} + \ell^2\right) = \frac{3 q_0 \ell}{4}$$

$\frac{3\ell^2}{2}$

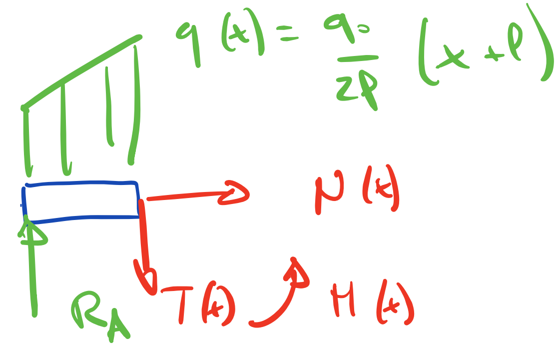
$\frac{5}{6}\ell^3$

$$\Sigma M_A \qquad R_B\,\ell = \int_0^\ell q(x)\,x\,dx = \int_0^\ell \frac{q_0}{2\ell}\left(x^2 + \ell x\right)dx = \frac{q_0}{2\ell}\left(\frac{\ell^3}{3} + \frac{\ell^3}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{R_B = \frac{5 q_0 \ell}{12}}} \qquad \text{ET} \qquad R_A = \frac{3 q_0 \ell}{4} - \frac{5 q_0 \ell}{12} = \frac{4}{12} q_0 \ell = \underline{\frac{q_0 \ell}{3}}$$

Exercice 3 (0.5 pt)

2) EFFORTS INTERIEURS



$$T(x) = R_A - \int_0^x \frac{q_0}{2\ell}(x+\ell)\,dx$$

$$= \frac{q_0\ell}{3} - \frac{q_0}{2\ell}\left(\frac{x^2}{2} + \ell x\right) = -\frac{q_0 x^2}{4\ell} - \frac{q_0 \ell x}{2\ell} + \frac{q_0\ell}{3} = \frac{-q_0}{12\ell}\left(3x^2 + 6\ell x - 4\ell^2\right)$$

$$M(x) = T(x)\,x + \int_0^x \frac{q_0}{2\ell}(x^2 + \ell x)\,dx$$

$$= -\frac{q_0 x^3}{4\ell} - \frac{q_0 \ell x^2}{2\ell} + \frac{q_0\ell}{3}x + \frac{q_0}{6\ell}x^3 + \frac{q_0\ell}{4\ell}x^2$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{q_0}{\ell}x^3 - \frac{1}{4}q_0 x^2 + \frac{1}{3}q_0\ell x = \frac{-q_0}{12\ell}\left(x^3 + 3\ell x^2 - 4\ell^2 x\right)$$

Exercice 3 (0.5 pt)

4) EQUATION DEFORMEE

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{q_0}{12\ell EI}\left(x^3 + 3\ell x^2 - 4\ell^2 x\right)$$

$$y'(x) = \frac{q_0}{12\ell EI}\left(\frac{1}{4}x^4 + \ell x^3 - 2\ell^2 x^2 + c_1\right)$$

$$y(x) = \frac{q_0}{12\ell EI}\left(\frac{1}{20}x^5 + \frac{\ell}{4}x^4 - \frac{2}{3}\ell^2 x^3 + c_1 x + c_2\right)$$

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 = c_2 \\ y(x=\ell) = 0 = \frac{1}{20} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{c_1}{\ell^4} \rightarrow c_1 = \frac{11}{30}\ell^4 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{q_0}{\ell EI}\left[\frac{x^5}{240} + \frac{\ell x^4}{48} - \frac{\ell^2 x^3}{18} + \frac{11\ell^4 x}{360}\right]$$

5) MOMENT FLEX MAX

MIN $T(x) = -\frac{q_0 x^2}{4\ell} - \frac{q_0 \ell x}{2\ell} + \frac{q_0 \ell}{3} = 0 \quad \Big| \, x\left(\frac{-12\ell}{q_0}\right)$

$$3x^2 + 6\ell x - 4\ell^2 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \ell\,\frac{-6 \pm \sqrt{\overset{84}{36 + 48}}}{6} = \ell\left(-1 \pm \sqrt{\frac{14}{6}}\right)$$

$$= \ell\left(-1 + \sqrt{\frac{14}{6}}\right)$$

$$= \ell \; 0.5275$$

$$M(x = x_c) = \frac{-q_0}{12\ell}\left(x^3 + 3\ell x^2 - 4\ell^2 x\right)$$